

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н. ТУПОЛЕВА

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

Базлов Е.Ф., Козлов В.А.

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА
В ЦИФРОВОМ ФИЛЬТРЕ.**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Казань 2005г.

ЗАДАНИЕ.

1. Определить спектральную плотность $\dot{X}(\omega)$ непериодического сигнала $x(t)$. Рассчитать и построить график модуля его спектральной плотности.

2. Найти верхнюю частоту в спектре сигнала, для чего выполнить следующее. Задать погрешность аппроксимации сигнала. Для сигналов, изменяющихся плавно и сравнительно медленно (рис. 1, 2, 5, 7), погрешность задать равной 0,01, а для тех, которые изменяются быстро, скачками (рис. 3, 4, 6, 8, 9, 10) погрешность должна быть равна 0,1. Выбрать произвольно ω_{\max} , а затем вычислить обратное преобразование Фурье в пределах $(-\omega_{\max}, \omega_{\max})$, где $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$. Таким образом, будет произведена аппроксимация сигнала $x(t)$ сигналом $xv(t)$ со спектром, ограниченным частотным диапазоном $(-\omega_{\max}, \omega_{\max})$.

Сравнить этот восстановленный сигнал $xv(t)$ с исходным сигналом $x(t)$, для чего вычислить среднеквадратическую погрешность аппроксимации Δ . Погрешность рекомендуется вычислить на временном интервале, соответствующем длительности сигнала. Если Δ будет больше заданной, увеличить ω_{\max} и повторить вычисления. Эту процедуру повторять до тех пор, пока Δ не уменьшится до заданной.

Для найденного значения ω_{\max} , вычислить интервал дискретизации T в соответствии с теоремой Котельникова, а затем определить число отсчетов, соответствующее этому T . Если N окажется дробным, округлить его до целого, обозначив его через $N1$. После этого уточнить интервал дискретизации, обозначив его через $T1$, а затем найти значение ω_{\max} , соответствующее $T1$. Построить дискретизированный сигнал.

3. Записать выражение ДПФ полученного дискретизированного сигнала и вычислить его. Построить график модуля ДПФ. Сделать выводы о характере спектра дискретизированного сигнала.

4. Сравнить модуль ДПФ для $n=5$ и 10 с модулем спектральной плотности $|\dot{X}(\omega)|$ на частотах, соответствующих этим значениям n . Сделать выводы о соответствии ДПФ и спектральной плотности $\dot{X}(\omega)$.

5. По заданному на z -плоскости расположению нулей и полюсов системной функции цифрового фильтра записать выражение системной функции $\dot{H}(z)$ и нарисовать структурную схему фильтра.

6. Вывести формулу импульсной характеристики $g(nT)$ фильтра, рассчитать ее и построить график $g(nT)$.

7. Вывести формулу частотной характеристики фильтра, рассчитать и построить график его амплитудно-частотной характеристики.

8. Записать разностное уравнение цифрового фильтра и вычислить выходной сигнал, построить его. Сделать выводы об искажениях сигнала при прохождении его через фильтр.

9. Записать выражение ДПФ сигнала на выходе фильтра и вычислить его. Построить график ДПФ выходного сигнала.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ.

Характеристики входного сигнала					Нули и полюсы системной функции	
№ вар	x(t) рис.	τ_1 с	τ_2 с	α с ⁻¹	Нули	Полюсы
1	2	3	4	5	6	7
1	1	10^{-4}	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.5$	$z_{*1}=0.8, z_{*2,3}=0.6\exp(\pm j\pi/3)$
2	2	10^{-4}	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.3$	$z_{*1}=0.5, z_{*2,3}=0.7\pm j0.5$
3	3	10^{-4}	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.9$	$z_{*1}=0.8, z_{*2,3}=0.5\exp(\pm j\pi/4)$
4	4	10^{-4}	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=j0.75$	$z_{*1}=0.9, z_{*2,3}=0.5\exp(\pm j\pi/6)$
5	5	10^{-4}	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.25$	$z_{*1}=0.7, z_{*2,3}=0.5\exp(\pm j\pi/2)$
6	6	10^{-4}	$4 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0.1, z_{02,3}=\pm j0.25$	$z_{*1}=0.8, z_{*2,3}=0.6\exp(\pm j\pi/3)$
7	7	-	-	10^3	$z_{01}=0.1, z_{02}=0.3, z_{03}=0.7$	$z_{*1}=0.8, z_{*2,3}=0.6\exp(\pm j\pi/3)$
8	8	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=-0.5, z_{02,3}=\pm 0.85$	$z_{*1}=0.5, z_{*2,3}=0.7\pm j0.5$
9	9	10^{-4}	-	-	$z_{01}=-0.75, z_{02,3}=\pm 0.35$	$z_{*1}=0.9, z_{*2,3}=0.5\exp(\pm j\pi/6)$
10	10	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=-0.75, z_{02,3}=\pm 0.35$	$z_{*1}=0.5, z_{*2,3}=-0.8\exp(\pm j\pi/3)$
11	1	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.5, z_{02,3}=0.7\pm j0.5$	$z_{*1}=0, z_{*2,3}=\pm j0.3$
12	2	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.8, z_{02,3}=0.5\exp(\pm j\pi/4)$	$z_{*1}=0, z_{*2,3}=\pm j0.9$
13	3	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.9, z_{02,3}=0.5\exp(\pm j\pi/6)$	$z_{*1}=0, z_{*2,3}=\pm j0.75$
14	4	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.7, z_{02,3}=0.5\exp(\pm j\pi/2)$	$z_{*1}=0, z_{*2,3}=\pm j0.25$
15	5	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.7, z_{02,3}=0.5\exp(\pm j\pi/2)$	$z_{*1}=0, z_{*2,3}=\pm j0.25$
16	6	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0.8, z_{02,3}=0.6\exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=0.1, z_{*2,3}=\pm j0.25$
17	7	-	-	$2 \cdot 10^3$	$z_{01}=0.8, z_{02,3}=0.9\exp(\pm j\pi/4)$	$z_{*1}=0.1, z_{*2}=0.3, z_{*3}=0.7$
18	8	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0.5, z_{02,3}=0.7\pm j0.5$	$z_{*1}=-0.5, z_{*2,3}=\pm j0.85$

1	2	3	4	5	6	7
19	9	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.9,$ $z_{02,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$	$z_{*1}=-0.75,$ $z_{*2,3}=\pm j0.35$
20	10	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0.5$ $z_{02,3}=-$ $0.8 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=-0.75,$ $z_{*2,3}=\pm j0.35$
21	1	$4 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.5$ $z_{02,3}=-$ $0.8 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=-0.75,$ $z_{*2,3}=\pm j0.35$
22	2	$4 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.9,$ $z_{02,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$	$z_{*1}=-0.75,$ $z_{*2,3}=\pm j0.35$
23	3	$4 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.5,$ $z_{02,3}=0.7 \pm j0.5$	$z_{*1}=-0.5,$ $z_{*2,3}=\pm 0.35$
24	4	$4 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.8,$ $z_{02,3}=0.9 \exp(\pm j\pi/4)$	$z_{*1}=0.1, z_{*2}=0.3$ $z_{*3}=0.7$
25	5	$4 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.8,$ $z_{02,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=0.1,$ $z_{*2,3}=\pm j0.25$
26	6	$4 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0.9,$ $z_{02,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$	$z_{*1}=0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.75$
27	7	-	-	500	$z_{01}=0.8,$ $z_{02,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/4)$	$z_{*1}=0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.9$
28	8	$4 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0.5,$ $z_{02,3}=0.7 \pm j0.5$	$z_{*1}=0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.3$
29	9	$4 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.8,$ $z_{02,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=-0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.5$
30	10	$4 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=-0.75,$ $z_{02,3}=\pm 0.35$	$z_{*1}=0.5, z_{*2,3}=-$ $-0.8 \exp(\pm j\pi/3)$
31	1	$5 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=-0.75,$ $z_{02,3}=\pm 0.35$	$z_{*1}=0.9,$ $z_{*2,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$
32	2	$5 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=-0.5,$ $z_{02,3}=\pm 0.85$	$z_{*1}=0.5,$ $z_{*2,3}=0.7 \pm j0.5$
33	3	$5 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.1, z_{02}=0.3,$ $z_{03}=0.7$	$z_{*1}=0.8,$ $z_{*2,3}=0.9 \exp(\pm j\pi/4)$
34	4	$5 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0.1,$ $z_{02,3}=\pm j0.25$	$z_{*1}=0.8,$ $z_{*2,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$
35	5	$5 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.25$	$z_{*1}=0.7,$ $z_{*2,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/2)$
36	6	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=j0.75$	$z_{*1}=0.9,$ $z_{*2,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$
37	7	-	-	250	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.9$	$z_{*1}=0.8,$ $z_{*2,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/4)$
38	8	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.3$	$z_{*1}=0.5,$ $z_{*2,3}=0.7 \pm j0.5$
39	9	$5 \cdot 10^{-4}$	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.5$	$z_{*1}=0.8,$ $z_{*2,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$

1	2	3	4	5	6	7
40	10	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.3$	$z_{*1}=0.5,$ $z_{*2,3}=0.7 \pm j0.5$
41	1	10^{-5}	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=j0.75$	$z_{*1}=0.9,$ $z_{*2,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$
42	2	10^{-5}	-	-	$z_{01}=0.1, z_{02}=-j0.25,$ $z_{03}=j0.25$	$z_{*1}=0.8,$ $z_{*2,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$
43	3	10^{-5}	-	-	$z_{01}=-0.5,$ $z_{02,3}=\pm 0.85$	$z_{*1}=0.5,$ $z_{*2,3}=0.7 \pm j0.5$
44	4	10^{-5}	-	-	$z_{01}=-0.75,$ $z_{02,3}=\pm 0.35$	$z_{*1}=0.5, z_{*2,3}=-$ $-0.8 \exp(\pm j\pi/3)$
45	5	10^{-5}	-	-	$z_{01}=0.5,$ $z_{02,3}=0.7 \pm j0.5$	$z_{*1}=0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.3$
46	6	10^{-5}	$3 \cdot 10^{-5}$	-	$z_{01}=0.9,$ $z_{02,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$	$z_{*1}=0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.75$
47	7	-	-	10^4	$z_{01}=0.8,$ $z_{02,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=0.1,$ $z_{*2,3}=\pm j0.25$
48	8	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-5}$	-	$z_{01}=0.5,$ $z_{02,3}=0.7 \pm j0.5$	$z_{*1}=-0.5,$ $z_{*2,3}=\pm j0.85$
49	9	10^{-5}	-	-	$z_{01}=0.5, z_{02,3}=-$ $0.8 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=-0.75,$ $z_{*2,3}=\pm j0.35$
50	10	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-5}$	-	$z_{01}=0.5, z_{02,3}=-$ $0.8 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=-0.75,$ $z_{*2,3}=\pm j0.35$
51	1	$2 \cdot 10^{-5}$	-	-	$z_{01}=0.5,$ $z_{02,3}=0.7 \pm j0.5$	$z_{*1}=-0.5,$ $z_{*2,3}=\pm j0.85$
52	2	$2 \cdot 10^{-5}$	-	-	$z_{01}=0.8,$ $z_{02,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$	$z_{*1}=0.1,$ $z_{*2,3}=\pm j0.25$
53	3	$2 \cdot 10^{-5}$	-	-	$z_{01}=0.9,$ $z_{02,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$	$z_{*1}=0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.75$
54	4	$2 \cdot 10^{-5}$	-	-	$z_{01}=0.5,$ $z_{02,3}=0.7 \pm j0.5$	$z_{*1}=0,$ $z_{*2,3}=\pm j0.3$
55	5	$2 \cdot 10^{-5}$	-	-	$z_{01}=-0.75,$ $z_{02,3}=\pm 0.35$	$z_{*1}=0.5, z_{*2,3}=-$ $-0.8 \exp(\pm j\pi/3)$
56	6	$2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	-	$z_{01}=-0.5,$ $z_{02,3}=\pm 0.85$	$z_{*1}=0.5,$ $z_{*2,3}=0.7 \pm j0.5$
57	7	-	-	$2 \cdot 10^4$	$z_{01}=0.1,$ $z_{02,3}=\pm j0.25$	$z_{*1}=0.8,$ $z_{*2,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$
58	8	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=j0.75$	$z_{*1}=0.9,$ $z_{*2,3}=0.5 \exp(\pm j\pi/6)$
59	9	$2 \cdot 10^{-5}$	-	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.3$	$z_{*1}=0.5,$ $z_{*2,3}=0.7 \pm j0.5$
60	10	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	-	$z_{01}=0, z_{02,3}=\pm j0.5$	$z_{*1}=0.8,$ $z_{*2,3}=0.6 \exp(\pm j\pi/3)$

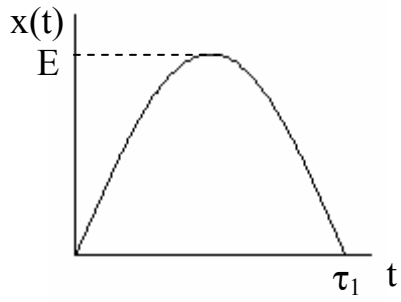


Рис.1

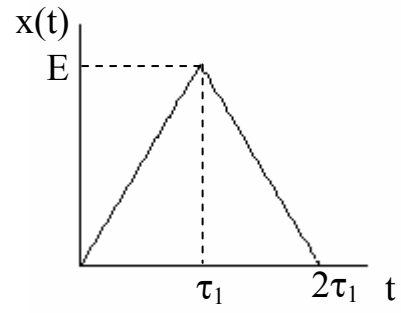


Рис.2

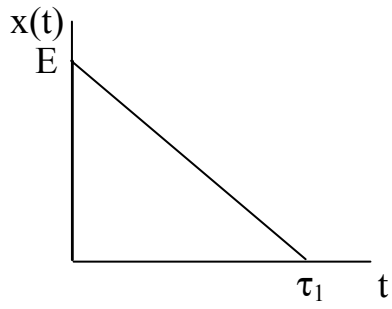


Рис.3

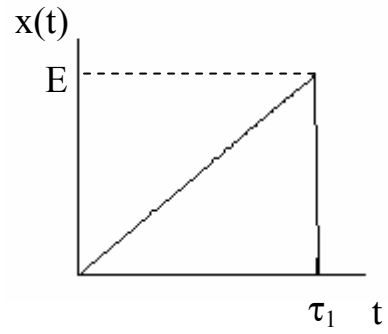


Рис.4

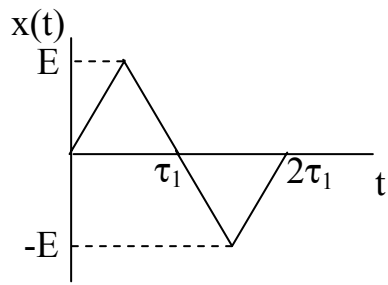


Рис.5

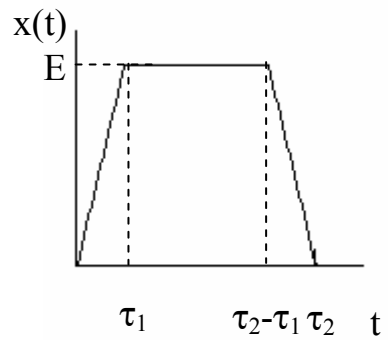


Рис.6

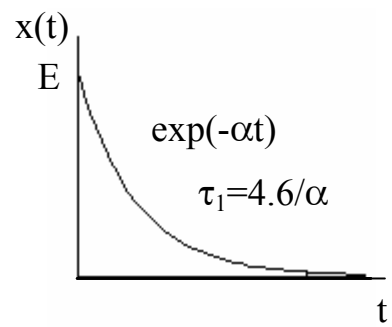


Рис.7

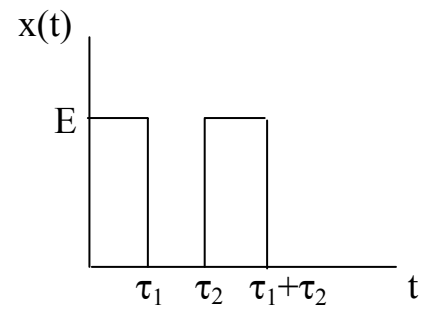


Рис.8

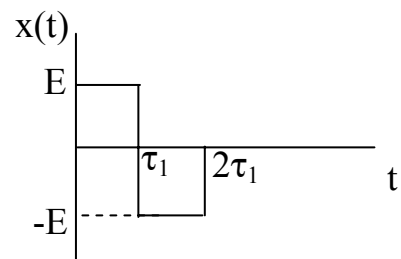


Рис.9

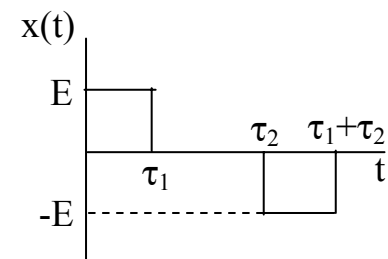


Рис.10

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Дискретное преобразование Фурье.

Дискретное преобразование Фурье

$$\dot{X}(n\Omega) = T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}, \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (1)$$

дает возможность рассчитать дискретный спектр $\dot{X}(n\Omega)$ по отсчетам дискретизированного сигнала $x(t)$. Спектр вычисляется на частотах $n\Omega=n2\pi/T_c$, где T_c – длительность сигнала, $N= T_c/T+1$ – общее число выборок в спектре, T – интервал дискретизации, который задается исходя из теоремы Котельникова. Расстояние между частотными выборками определяется длительностью сигнала $T_c=NT$. Изменение интервала дискретизации T при заданной длительности сигнала приводит к изменению числа выборок N и, следовательно, к изменению верхней частоты, до которой ведется расчет.

ДПФ является комплексной функцией, поэтому для (1) можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{X}(n\Omega) &= T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) \cos nk \frac{2\pi}{N} - jT \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) \sin nk \frac{2\pi}{N} = A(n\Omega) - jB(n\Omega) = \\ &= \sqrt{A^2(n\Omega) + B^2(n\Omega)} e^{-\arctg \frac{B(n\Omega)}{A(n\Omega)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

$|\dot{X}(n\Omega)| = \sqrt{A^2(n\Omega) + B^2(n\Omega)}$ – амплитудно-частотная характеристика спектра;

$$\psi(n\Omega) = -\arctg \frac{B(n\Omega)}{A(n\Omega)} \text{ – фазо-частотная характеристика.}$$

ДПФ является периодической функцией частоты с периодом, равным $N\Omega=2\pi/T$. Таким образом, спектр $\dot{X}(n\Omega)$ на интервале $0 \leq n \leq N-1$ равен спектру сигнала $x(kT)$, причем первые $N/2-1$ линий соответствуют спектральным линиям $x(kT)$ на положительных частотах, а последние $N/2-1$ линий ДПФ соответствуют спектральным линиям на отрицательных частотах.

Так как производится анализ детерминированного сигнала, можно получить выражение ДПФ в замкнутой форме. Для этого можно воспользоваться известной суммой:

$$\sum_{k=0}^{N-1} b^k e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \frac{1 - b^N}{1 - b e^{-j2\pi \frac{n}{N}}}.$$

2. Определение z-преобразования функции дискретного времени.

Математическое описание процесса цифровой обработки сигналов основано на представлении их в виде функции дискретного времени или, что то же, числовых последовательностей:

$$x(0), x(1), x(2), x(3), \dots, x(k), \dots \quad (3)$$

Целочисленные индексы $i=0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots$ имеют смысл текущего времени. Если указать значение периода дискретизации T непрерывного сигнала $x(t)$, то устанавливается однозначная связь между этим сигналом и числовой последовательностью. При этом каждое число последовательности $x(k)$ равно значению непрерывного сигнала в момент времени $t=kT$:

$$x(t)=x(kT). \quad (4)$$

Это равенство показывает, что одной и той же последовательности $x(k)$ соответствуют различные непрерывные сигналы, отличающиеся только масштабом по оси времени. Последовательность (3) имеет своим z-преобразованием следующее выражение:

$$\dot{X}(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}. \quad (5)$$

Это выражение называется прямым z-преобразованием функции дискретного времени или числовой последовательности $x(k)$. Из этого выражения следует, что для того, чтобы заданной функции (последовательности) $x(k)$ поставить в соответствие z-преобразование, необходимо каждый отсчет функции (член последовательности) умножить на некоторую комплексную переменную z^{-k} , где k номер отсчета функции, а затем сложить результаты. При этом каждое произведение, входящее в сумму (5), однозначно соответствует определенному отсчету функции. Показатель степени k говорит о месте коэффициента в последовательности чисел.

Зададим, например, некоторую числовую последовательность $x(k)=(0.1; 2.3; 1.05\dots)$. Этой последовательности соответствует z – преобразование

$$\dot{X}(z)=0.1+2.3z^{-1}+1.05z^{-2}+\dots$$

Произведение $1.05z^{-2}$ означает, что в исходной последовательности $x(k)$ число 1.05 идет вторым после начального (нулевого по счету) числа 0.1.

Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять знак соответствия между функцией дискретного времени и ее z-преобразования: $x(k) \leftrightarrow \dot{X}(z)$.

Z-преобразование позволяет достаточно просто отразить основные операции цифровой обработки сигналов: задержки на определенное число тактов, умножения отсчетов сигнала на весовые коэффициенты и сложения. Так, для единичного импульса, аналогичного δ -функции и имеющего ненулевое значение только для $k=0$, прямое z-преобразование $\dot{X}(z) = 1$. Для единичной ступенчатой последовательности, принимающей значения, равные единице для всех положительных k , z-преобразование

$$\dot{X}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}, \text{ т.е.,} \quad (6)$$

является суммой членов геометрической прогрессии.

Использование формул бесконечных рядов дает еще ряд z -преобразований, приведенных в таблице соответствия.

3. Основные свойства прямого z -преобразования.

В дальнейшем анализе сигналов и дискретных цепей оказываются важными три следующих свойства z -преобразования.

1) Свойство линейности. Если дискретным функциям $f(k)$ и $g(k)$ соответствуют их z -преобразования $\dot{F}(z)$ и $\dot{G}(z)$, то линейной комбинации $Af(k)+Bg(k)$ соответствует линейная комбинация z -преобразований $A\dot{F}(z) + B\dot{G}(z)$.

2) Задержка сигнала на целое число периодов дискретизации. Согласно определению прямого z -преобразования (5) дискретному сигналу $f(k)$, сдвинутому на время m в сторону запаздывания, т.е. сигналу $f(k-m)$ соответствует z – преобразование $\dot{F}(z)z^{-m}$, где $\dot{F}(z) \leftrightarrow f(k)$.

3) Дискретная свертка – эквивалент интеграла наложения для аналоговых цепей. В области оригиналов дискретная свертка записывается так:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k x(i)g(k-i).$$

Имея z -преобразования $\dot{X}(z) \leftrightarrow x(k)$ и $\dot{G}(z) \leftrightarrow g(k)$, получим z -преобразование свертки как произведение z – преобразований:

$$\dot{Y}(z) = \dot{X}(z)\dot{G}(z) \quad (7)$$

4. Методы вычисления обратного z – преобразования.

Для нахождения функции дискретного времени $x(k)$ по заданному z -преобразованию $\dot{X}(z)$ надо вычислить обратное z -преобразование:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \dot{X}(z)z^{k-1} dz \quad (8)$$

Этот интеграл равен сумме вычетов функции $\dot{X}(z)z^{k-1}$ в полюсах внутри контура C . Если в точке z_* функция $\dot{X}(z)z^{k-1}$ имеет полюс порядка s , то ее можно представить так

$$\dot{X}(z)z^{k-1} = \psi(z)/(z - z_*)^s.$$

Вычет в точке z_* дается формулой

$$\text{Res}[\dot{X}(z)z^{k-1}] = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \psi(z) \Big|_{z=z_*}.$$

Если в точке z_* имеется только полюс первого порядка, то

$$\text{Res}[\dot{X}(z)z^{k-1}] = \psi(z_*).$$

Кроме того, для нахождения функции $x(k)$ по ее заданному z -преобразованию $\dot{X}(z)$ существует ряд приемов, основанных на свойствах z -преобразования. Эти приемы можно разделить на две группы:

- а) аналитические методы отыскания оригиналов $x(k)$.
- б) методы численного определения отсчетов функции $x(k)$.

4.1 Использование таблиц z -преобразований.

Этот прием основан на сопоставлении заданных численных коэффициентов перед степенями z -изображения дискретной функции времени и аналогичных коэффициентов в табличных формулах z -преобразований.

Пусть, например, задано z -преобразование сигнала

$$\dot{X}(z) = \frac{3z}{z^2 + 0.8}. \quad (9)$$

Требуется найти в аналитическом виде оригинал, соответствующий этому z -преобразованию. Замечая, что высшая степень z в числителе – первая, а знаменателя – вторая и свободный член знаменателя меньше единицы, находим в таблице соответствия дискретных функций и их z -преобразований изображение, соответствующее этим условиям:

$$\dot{X}(z) = \frac{Aze^{-\alpha T} \sin \omega T}{z^2 - 2e^{-\alpha T} z \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}. \quad (10)$$

Такому изображению соответствует оригинал

$$x(kT) = Ae^{-k\alpha T} \sin(k\omega T). \quad (11)$$

Сопоставляя коэффициенты перед первой степенью z в (9) и (10), а также свободные члены, получим

$$\begin{aligned} 0 &= 2e^{-\alpha T} \cos \omega T \\ 3 &= Ae^{-\alpha T} \sin \omega T \\ 0.8 &= e^{-2\alpha T} \end{aligned} \quad (12)$$

Решение полученной системы уравнений относительно параметров A , α , ω позволяет аналитически определить искомый дискретный сигнал.

Так, из третьего уравнения системы (12) получаем

$$e^{-\alpha T} = (0.8)^{1/2} = 0.895.$$

Отсюда $\alpha T = -\ln(0.895) = 0.11$. Подставляя $e^{-\alpha T} = 0.895$ в первое уравнение, получаем $0 = 2 \cdot 0.895 \cos \omega T$, что дает $\omega T = \pi/2 + m \cdot \pi$ ($m = 0, 1, \dots$).

Используя второе уравнение, получаем $m = 0$, поскольку $A > 0$ и $\sin \omega T > 0$. Отсюда $\omega = \pi/2T$. Так как частота дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$, то частота гармонического сигнала оказывается в 4 раза меньше частоты дискретизации.

Учитывая, что $\sin \omega T = 1$, определяем амплитуду сигнала

$$A = 3/e^{-\alpha T} = 3/0.895 = 3.35.$$

Таким образом, для заданного z -преобразования (9) дискретный сигнал имеет вид:

$$x(k) = 3.35e^{-0.11k} \sin(k\pi/2) = 3.35 \cdot (0.895)^k \cdot \sin(k\pi/2).$$

4.2 Приведение исходного z-преобразования к табличному виду с использованием свойств z-преобразования.

Пусть задано некоторое z-преобразование, например:

$$\dot{X}(z) = \frac{3z^2 - z - 1}{2z^2 + 1}.$$

Его можно представить в виде суммы z-преобразований:

$$\dot{X}(z) = \dot{X}_1(z) + \dot{X}_2(z) + \dot{X}_3(z) = \frac{3z^2}{2z^2 + 1} - \frac{z}{2z^2 + 1} - \frac{1}{2z^2 + 1}. \quad (13)$$

Для изображения $\dot{X}_1(z)$ применяется нормирование коэффициентов перед старшей степенью z, т.е.

$$\dot{X}_1(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{z^2}{z^2 + 0.5}.$$

Результат произведенного нормирования указывает на необходимость использования табличной формулы

$$\dot{X}(z) = \frac{A_1 z^2 - A_1 z e^{-\alpha T} \cos \omega T}{z^2 - 2e^{-\alpha T} z \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}$$

Для нее составляется и решается система уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \\ A_1 e^{-\alpha T} \cos(\omega T) &= 0, \\ e^{-2\alpha T} &= 0.5. \end{aligned}$$

в результате получаем в аналитическом виде оригинал

$$\dot{X}_1(z) = \frac{3}{2} \cdot A_1 e^{-\alpha k T} \cos(k\omega T).$$

Аналогично производится обратное преобразование для второй дроби в выражении (13):

$$\dot{X}_2(z) = \frac{z}{2z^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z^2 + 0.5}. \quad (14)$$

Изображению (14) будет соответствовать оригинал:

$$x_2(k) = \frac{1}{2} A_2 e^{-\alpha k T} \sin(k\omega T).$$

С целью приведения третьей дроби в выражении (13) к табличному виду, умножим и разделим ее на переменную z:

$$\dot{X}(z) = \frac{1}{2z^2 + 1} = \frac{z}{2z^2 + 1} \cdot z^{-1}. \quad (15)$$

Сравнение выражений (14) и (15) показывает, что $\dot{X}_3(z)$ отличается от $\dot{X}_2(z)$ только сдвигом во времени на величину T. Поэтому

$$x_3(k) = \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot e^{-\alpha(k-1)T} \sin[(k-1)\omega T].$$

Это слагаемое определено только для $k \geq 1$, поэтому для $k=0$ существуют только $x_1(k)$ и $x_2(k)$. Искомый сигнал в этом случае можно записать двумя способами.

$$1). x(k) = \begin{cases} x_1(k) + x_2(k) & \text{для } k = 0 \\ x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) & \text{для } k \geq 1 \end{cases}$$

$$2). x(k) = [x_1(k) + x_2(k)] \cdot 1(k) + x_3(k) \cdot 1(k-1).$$

4.3 Метод разложения на простые дроби.

Представим z-преобразование функции $x(k)$ дробно-рациональной функцией:

$$\dot{X}(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N}{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + b_2 z^{M-2} + \dots + b_M},$$

в которой для z-преобразования реальных сигналов ($k \geq 0$) выполняется условие $M > N$.

Найдем корни знаменателя дробно-рациональной функции $\dot{X}(z)$. При этом отношение полиномов $A(z)$ и $B(z)$ может быть представлено в виде суммы простых дробей. Возможны два варианта такого представления.

а) Корни простые (все z_i разные). В этом случае

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2}{z - z_2} + \frac{C_3 z}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n z}{z - z_n}, \quad (16)$$

где C_i – действительные коэффициенты.

Каждый член суммы (16) имеет табличное соответствие оригиналу

$$\frac{C_i z}{z - z_i} \leftrightarrow C_i x_i(k).$$

Воспользовавшись свойством линейности z-преобразования, получаем, что искомый оригинал

$$x(k) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(k).$$

Пример 1.

$$\dot{X}(z) = \frac{z^2 - 2.2z}{z^2 - 1.4z + 0.45}.$$

Найдем корни знаменателя:

$$z^2 - 1.4z + 0.45 = 0.$$

Из этого уравнения получаем: $z_{1,2} = 0.7 \pm 0.2$. Представим $\dot{X}(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$\dot{X}(z) = \frac{z^2 - 2.2z}{(z - 0.5)(z - 0.9)} = \frac{C_1 z}{z - 0.5} + \frac{C_2 z}{z - 0.9}, \quad (17)$$

в которой значения коэффициентов C_1 и C_2 пока неизвестны. Приведем (17) к общему знаменателю:

$$\dot{X}(z) = \frac{C_1 z(z - 0.9) + C_2 z(z - 0.5)}{(z - 0.5)(z - 0.9)} =$$

$$\frac{(C_1 + C_2)z^2 - (0.9C_1)z^2 - (0.9C_1 + 0.5C_2)z}{(z - 0.5)(z - 0.9)} \quad (18)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в числителях левой части (17) и правой части (18), получим систему

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ 0.9C_1 + 0.5C_2 &= 2.2. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает $C_1 = 4.25$, $C_2 = -3.25$. Следовательно,

$$\dot{X}(z) = \frac{4.25z}{z - 0.5} - \frac{3.25z}{z - 0.9}.$$

Используя таблицу соответствия, находим

$$x(k) = 4.25 \cdot (0.5)^k - 3.25 \cdot (0.9)^k.$$

Пример 2.

$$\dot{X}(z) = \frac{3z^2 - 3.1z + 0.25}{z^2 - 1.4z + 0.45}.$$

Знаменатель здесь такой же, как и в первом примере. Поэтому корни знаменателя уже известны: $z_1 = 0.5$, $z_2 = 0.9$.

Если разложение на простые дроби искать в той же форме (16), то после приведения к общему знаменателю в числителе не окажется свободного члена (z^0). Поэтому необходимо искать разложение в такой форме, чтобы после приведения в числителе появлялся свободный член:

$$\dot{X}(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{z - z_2} + \frac{C_3}{z - z_1} \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что запись данной формы (19) несимметрична относительно корней z_1 и z_2 . Возникает неопределенность, какой из корней 0.5 или 0.9 считать z_1 , а какой z_2 . В зависимости от выбора будем получать разные разложения и, как следствие, разные записи оригинала $x(k)$. С другой стороны, фактическое значение оригинала не должно зависеть от порядка нумерации корней.

Сравним все последовательные выкладки при двух возможных выборах записи:

$$\dot{X}_1(z) = \frac{C_1 z}{z - 0.9} + \frac{C_2 z}{z - 0.5} + \frac{C_3}{z - 0.9},$$

$$\dot{X}_2(z) = \frac{A_1 z}{z - 0.9} + \frac{A_2 z}{z - 0.5} + \frac{A_3}{z - 0.5}.$$

Приведение к общему знаменателю дает:

$$\dot{X}_1(z) = \frac{C_1 z^2 - 0.5C_1 z + C_3 z^2 - 0.9C_2 z + C_3 z - 0.5C_3}{(z - 0.9)(z - 0.5)}.$$

$$\dot{X}_2(z) = \frac{A_1 z^2 - 0.5A_1 z + A_2 z^2 - 0.9A_2 z + A_3 z - 0.9A_3}{(z - 0.9)(z - 0.5)}.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях z , получим для каждой формы записи систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 3 & -A_1 + A_2 &= 3 \\ -0.5C_1 - 0.9C_2 + C_3 &= -3.1 & -0.5A_1 - 0.9A_2 + A_3 &= -3.1 \\ -0.5C_3 &= 0.25 & -0.9A_3 &= 0.25. \end{aligned}$$

Решение этих систем уравнений дает следующие значения коэффициентов:

$$C_1 = 0.25; C_2 = 2.75; C_3 = -0.5.$$

$$A_1 = 0.11/0.36; A_2 = 1.19/0.36; A_3 = -0.25/0.9.$$

Переходя от z – преобразования к оригиналу, получим две формы записи:

$$x_1(k) = [0.25 \cdot (0.9)^k + 2.75 \cdot (0.5)^k] \cdot 1(k) - 0.5 \cdot (0.9)^{k-1} \cdot 1(k-1),$$

$$x_2(k) = [-(0.11/0.36) \cdot (0.9)^k + 1.19/0.36 \cdot (0.5)^k] \cdot 1(k) - (0.25/0.9) \cdot (0.5)^{k-1} \cdot 1(k-1).$$

Введение сомножителей $1(k)$ и $1(k-1)$ показывает, какая из функций дискретного времени определена для $k=0, 1, 2, \dots$, а какая сдвинута на один такт и определена только для $k \geq 1$. Сравним значения оригиналов $x_1(k)$ и $x_2(k)$ для отдельных значений аргумента k .

При $k=0$

$$x_1(0) = 0.25 + 2.75 = 3; x_2(0) = -(0.11/0.36) + (1.19/0.36) = 3.$$

При $k > 1$

$$x_1(k) = 0.25 \cdot (0.9)^k - 0.5(0.9)^k \cdot (0.9)^{-1} + 2.75 \cdot (0.5)^k = -0.3056 \cdot (0.9)^k + 2.75 \cdot (0.5)^k.$$

$$\begin{aligned} x_2(k) &= -(0.11/0.36)(0.9)^k + (1.19/0.36) \cdot (0.5)^k - (0.25/0.9) \cdot (0.5)^k \cdot (0.5)^{-1} = \\ &= -0.3056 \cdot (0.9)^k + 2.75 \cdot (0.5)^k. \end{aligned}$$

Как видим, оба оригинала $x_1(k)$ и $x_2(k)$ совпадают в каждой точке и, несмотря на разную форму записи, определяют одну и ту же функцию дискретного времени.

б) Корни кратные.

Если среди корней знаменателя $B(z)$ имеется корень z_i кратности l , то среди простых дробей появляются при разложении члены вида

$$\frac{C_1 z}{z - z_i}; \frac{C_2 z}{(z - z_i)^2}; \dots; \frac{C_p z}{(z - z_i)^l}.$$

Пример 3.

$$\dot{X}(z) = \frac{z^2 + 0.45}{z^2 - 0.25z + 0.25}. \quad (20)$$

Корни знаменателя: $z_{1,2} = 0.5, l=2$.

Разложение на простые дроби будет иметь вид

$$\dot{X}(z) = \frac{C_1 z}{z - 0.5} + \frac{C_2 z}{(z - 0.5)^2} + \frac{C_3}{z - 0.5}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\dot{X}(z) = \frac{C_1 z^2 - 0.5C_1 z + C_2 z + C_3 z - 0.5C_3}{(z - 0.5)^2}. \quad (21)$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях z в числителях (20) и (21), составим систему:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1; \\ -0.5C_1 + C_2 + C_3 &= 0; \\ -0.5C_3 &= 0.45. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает: $C_1=1$; $C_2=1.4$; $C_3=-0.9$.

Подставляя полученные коэффициенты в разложение, окончательно получаем:

$$\dot{X}(z) = \frac{z}{z - 0.5} + \frac{1.42}{(z - 0.5)^2} - \frac{0.9}{z - 0.5}.$$

Этому разложению соответствует оригинал:

$$x(k) = [(0.5)^k + 1.4k(0.5)^{k-1}] \cdot 1(k) - 0.9 \cdot (0.5)^{k-1} \cdot 1(k-1).$$

4.4 Численное определение функции дискретного времени.

Возможность представления любого z -преобразования, заданного в виде дробно-рациональной функции, в виде ряда по убывающим степеням

$$\dot{X}(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = X_0 + X_1 z^{-1} + X_2 z^{-2} + \dots, \quad (22)$$

которому, как известно, соответствует функция дискретного времени

$$x(k) = X_0 + X_1(1) + X_2(2) + \dots,$$

определяет способ численного нахождения коэффициентов X_0, X_1, X_2, \dots

Значения этих коэффициентов могут быть получены путем деления многочлена $A(z)$ на многочлен $B(z)$.

Пример 4.

$$\dot{X}(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + z - 1}.$$

Найдем представление $\dot{X}(z)$ в виде степенного ряда. Деление многочленов $z^2 + 2z + 1$ и $z^2 + z - 1$ дает следующий результат:

$$\dot{X}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + \dots, \quad (23)$$

из которого непосредственно получаем: $X_0=1$; $X_1=1$; $X_2=1$; $X_3=0$; $X_4=1$; ...

Количество членов ряда (22) устанавливается исходя из конкретных условий решаемой задачи и определяет, по существу, длительность процедуры деления многочленов.

5. Z-преобразование цифрового фильтра.

По аналогии с преобразованием Лапласа для непрерывных сигналов z -преобразования входной и выходной последовательностей цифрового фильтра связаны между собой (см. формулу (7)):

$$\dot{Y}(z) = \dot{X}(z)\dot{H}(z), \quad (24)$$

где $\dot{H}(z)$ – передаточная (системная) функция фильтра.

С передаточной функцией $\dot{H}(z)$ непосредственно связана дискретная импульсная характеристика $g(k)$. Это следует из выражения (7), если в нее подставить $\dot{X}(z) = 1$, т.е. z -преобразование одиночного отсчета – аналога δ -функции для непрерывных сигналов. Поэтому нахождение дискретной импульсной характеристики по заданной функции $\dot{H}(z)$ сводится к вычислению обратного z -преобразования последней.

В общем случае для реального фильтра его передаточная функция выражается отношением двух полиномов

$$\dot{H}(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 - b_0 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_M z^{-M}} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 - \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}. \quad (25)$$

Обычно $M \geq N$.

Так же, как и для аналогового фильтра частотные характеристики цифрового фильтра полностью определяются расположением особых точек передаточной функции. Отличие состоит только в том, что для цифрового фильтра особые точки его передаточной функции располагаются на плоскости переменной z . В связи с этим следует отметить ряд особенностей z -плоскости, которые используются при анализе частотных характеристик цифрового фильтра.

6. Основные характеристики z -плоскости.

Введение переменной z при анализе дискретных последовательностей и цепей позволило получить их описание в виде рациональных функций z в отличие от трансцендентных функций переменной p . Между этими переменными существует известная связь: $z = e^{pT}$; $p = \frac{1}{T} \ln z$, где $p = \sigma + j\omega$.

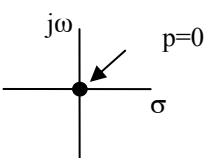
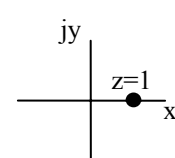
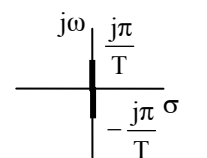
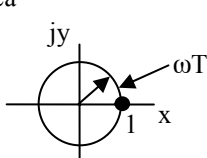
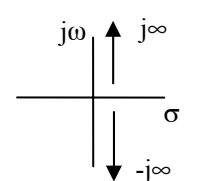
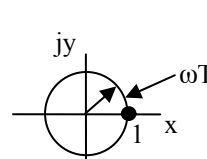
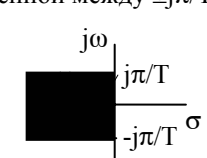
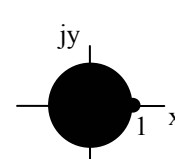
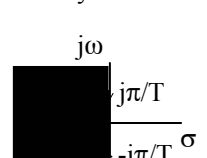
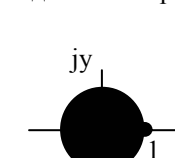
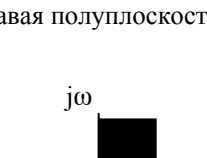
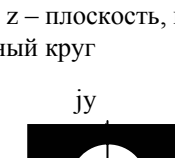
$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cos(\omega T) + j e^{\sigma T} \sin(\omega T) = x + jy.$$

$$x = e^{\sigma T} \cos(\omega T), \quad y = e^{\sigma T} \sin(\omega T)$$

Мнимая ось ($j\omega$) в p -плоскости ($\sigma = 0$) отображается в точки на единичной окружности $z = e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j \sin(\omega T)$. Отрицательные значения σ , изображающие левую половину p -плоскости, отображаются в z -плоскости на внутреннюю область единичной окружности. Положительные значения σ соответствуют правой половине p -плоскости и отображаются на z -плоскости в точки вне единичной окружности.

Аналоговый фильтр является устойчивым, если все полюсы лежат в левой половине p -плоскости. Зная связь между z и p , можно установить аналогичное

правило устойчивости цифрового фильтра в z -плоскости. Все полюсы должны лежать внутри единичной окружности. Нули передаточной функции так же, как и в p – плоскости, не влияют на устойчивость и могут произвольно располагаться на z – плоскости. Основные свойства z -плоскости показаны в таблице.

Точки и области на p - плоскости	Точки и области на z - плоскости	Примечания
Точка $p=0$ 	Точка $z=1$ 	
Отрезок мнимой оси от $-j\pi/T$ до $j\pi/T$ 	Окружность единичного радиуса 	Изменению частоты на $2\pi/T$ соответствует на z – плоскости один полный оборот радиус-вектора. Взаимно однозначное отображение
Мнимая ось от $-j\infty$ до $j\infty$ 	Окружность единичного радиуса 	При движении изображающей точки вдоль всей оси $j\omega$, точка z описывает бесконечно большое число окружностей с единичным радиусом. Взаимно неоднозначное отображение.
Часть левой полуплоскости, заключенной между $\pm j\pi/T$ 	Круг единичного радиуса 	Взаимно однозначное отображение
Левая полуплоскость 	Круг единичного радиуса 	Каждая полоса левой полуплоскости шириной $\pm j\pi/T$ отображается внутрь единичного круга. Взаимно неоднозначное отображение.
Правая полуплоскость 	Вся z – плоскость, исключая единичный круг 	Однозначное отображение

Угол ωT определяет точку на единичной окружности. Учитывая, что $\omega = 2\pi f$, $T = 1/f_d$, где f_d – частота дискретизации сигнала, этот угол будет равен $2\pi f/f_d$. Угловая координата любой точки на единичной окружности соответствует отношению определенной частоты f к частоте дискретизации f_d . Если $f = f_d$, то $\omega T = 2\pi$. Таким образом, частота дискретизации соответствует угловой координате 2π радиан. При $f = 0$ имеем $\omega T = 0$, т.е., постоянному сигналу соответствуют углы, равные 0.

Помимо частоты дискретизации важное значение имеет частота, составляющая половину частоты дискретизации: $f_0 = f_d/2$ при $\omega T = \pi$. Согласно теореме Котельникова, частота дискретизации должна по крайней мере вдвое превышать максимальную частоту спектра сигнала. Поэтому частота f_0 – максимальная частота спектра входного сигнала, при которой фильтр работает в отсутствие наложения друг на друга периодически повторяющихся в частотной области спектров дискретизированного сигнала.

7. Разностное уравнение цифрового фильтра.

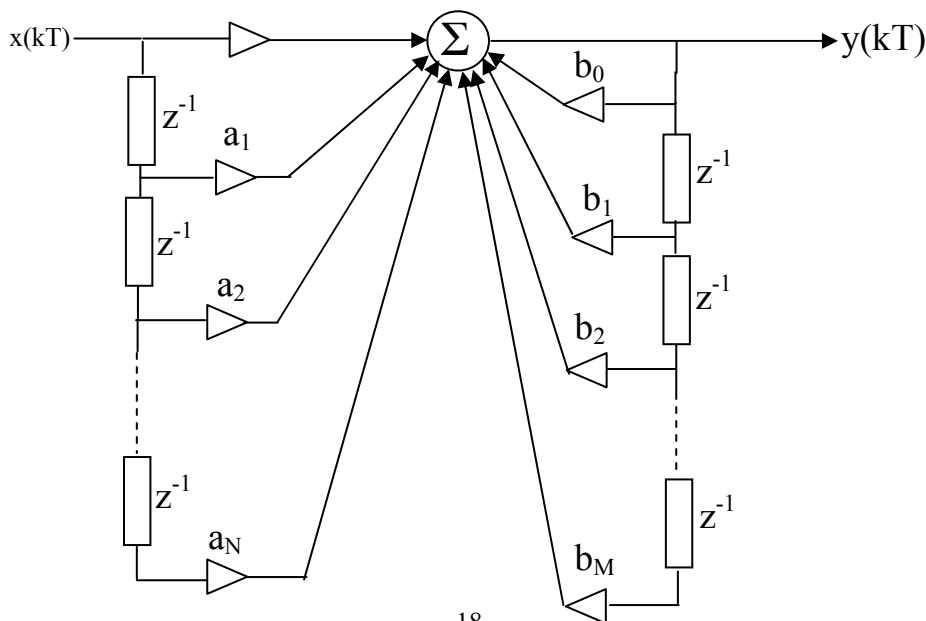
Подставив в уравнение (24) выражение (25), получим связь выходного сигнала $\dot{Y}(z)$ с входным $\dot{X}(z)$:

$$\begin{aligned} \dot{Y}(z) \cdot (1 - b_0 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_M z^{-M}) = \\ \dot{X}(z) \cdot (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}) \end{aligned} \quad (26)$$

Применим к (26) обратное z -преобразование. В результате получим разностное уравнение, решая которое можно получить $y(k)$ – сигнал на выходе фильтра в форме функции дискретного времени:

$$\begin{aligned} y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + \dots + a_N x(k-N) + b_0 y(k) + \\ b_1 y(k-1) + b_2 y(k-2) + \dots + b_M y(k-M). \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (27) соответствует структурной схеме рекурсивного фильтра



(рис.11).

Частным случаем рекурсивного фильтра является нерекурсивный фильтр, который получается, если все коэффициенты $b_i=0$.

8. Частотная характеристика цифрового фильтра.

Чтобы получить частотную характеристику фильтра, на его вход подают гармоническое колебание и затем исследуют сигнал на выходе. Если система линейна, то на выходе будет гармоническое колебание той же частоты, но с другими амплитудой и фазой. Поскольку амплитуду и фазу можно объединить, представив в комплексной форме, то в качестве входного сигнала обычно используют не действительную, а комплексную гармонику (комплексную амплитуду). Пусть на вход цифрового фильтра подается сигнал $e^{j\omega kT}$, $k=0, 1, 2, \dots$. Тогда, поскольку система линейна, сигнал на выходе может быть только вида $\dot{K}(\omega) \cdot e^{j\omega kT}$, где $\dot{K}(\omega)$ – комплексный коэффициент передачи, который зависит лишь от ω . Следовательно, в разностное уравнение фильтра (27) можно подставить $x(kT) = e^{j\omega kT}$ и $y(kT) = \dot{K}(\omega) \cdot e^{j\omega kT}$. При этом разностное уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega)e^{j\omega kT} = & a_0e^{j\omega T} + a_1e^{j\omega(k-1)T} + \dots + a_Ne^{j\omega(k-N)T} + \\ & b_0\dot{K}(\omega)e^{j\omega kT} + b_1\dot{K}(\omega)e^{j\omega(k-1)T} + \dots + b_M\dot{K}(\omega)e^{j\omega(k-M)T} \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда

$$\dot{K}(\omega) = \frac{a_0 + a_1e^{-j\omega T} + a_2e^{-2j\omega T} + \dots + a_Ne^{-Nj\omega T}}{1 - b_0 - b_1e^{-j\omega T} - b_2e^{-2j\omega T} - \dots - b_Me^{-Mj\omega T}} \quad (29)$$

Модуль $\dot{K}(\omega)$ является амплитудно-частотной, а аргумент – фазо-частотной характеристикой фильтра.

Таблица соответствий дискретных функций $X(k)$ и их z – преобразований.

$x(k)$	$\dot{X}(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-k\alpha T}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$

k^2	$\frac{1}{(z-1)^3}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
ka^{k-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(-1)^k$	$\frac{z}{z+1}$
$\frac{k(k-1)}{2}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$
$e^{-k\alpha T} \sin(k\omega T)$	$\frac{ze^{-\alpha T} \sin(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$
$e^{k\alpha T} \cos(k\omega T)$	$\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos(\omega T))}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$
$e^{-k\alpha T} \cos(k\omega T + \varphi)$	$\frac{z^2 \cos \varphi - ze^{-\alpha T} \cos(\omega T - \varphi)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$
Отсчеты прямоугольного импульса длительностью К	$\frac{z}{z-1} (1 - z^{-K})$
Отсчеты треугольного импульса длительностью К	$\frac{z}{(z-1)^2} (1 - z^{-K})^2$

9. Вычисление среднеквадратической ошибки аппроксимации.

При аппроксимации сигнала $x(t)$ функцией $xv(t)$ среднеквадратическая ошибка Δ вычисляется по формуле

$$\Delta = \sqrt{\frac{\int_0^{\tau_{\text{и}}} (x(t) - xv(t))^2 dt}{\int_0^{\tau_{\text{и}}} x^2(t) dt}} \quad (30)$$

Здесь $\tau_{\text{и}}$ – длительность сигнала.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.

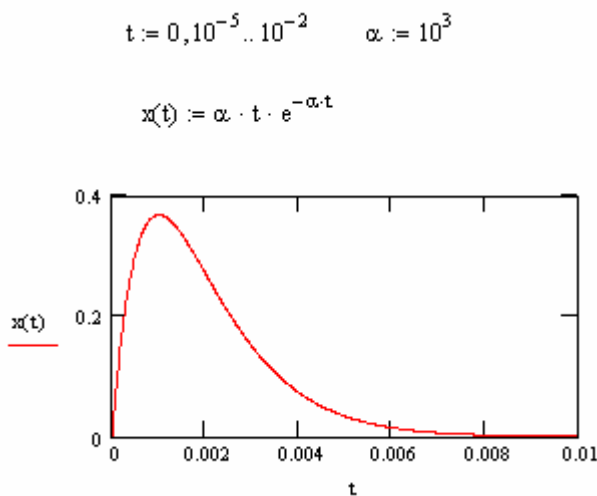
В примере отсутствуют (за некоторыми исключениями) обсуждения полученных результатов.

Задан сигнал

$$x(t) = \alpha t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad \alpha = 10^3$$

Погрешность аппроксимации задать 0.05.

Используя Mathcad, построим эту функцию.



Длительность этого сигнала, определенная на уровне 0,01 от максимального значения определяется формулой $\tau_1 = 7,6/\alpha$, т.е. $\tau_1 = 0,0076$ с.

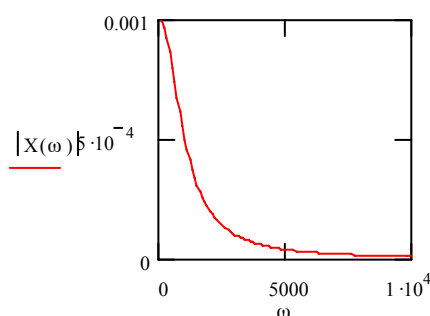
1. Определить спектральную плотность $\dot{X}(\omega)$ заданного непериодического сигнала $x(t)$. Рассчитать и построить график модуля спектральной плотности.

$$\dot{X}(\omega) = \int_0^{\infty} \alpha t e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{-\alpha e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha^2 + 2j\omega\alpha - \omega^2} [(\alpha + j\omega)t - 1] \Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{(\alpha + j\omega)^2}$$

Модуль спектральной плотности

$$|\dot{X}(\omega)| = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = X(\omega)$$

Модуль спектральной плотности сигнала, рассчитанный с помощью системы Mathcad показан на приведенном ниже рисунке.



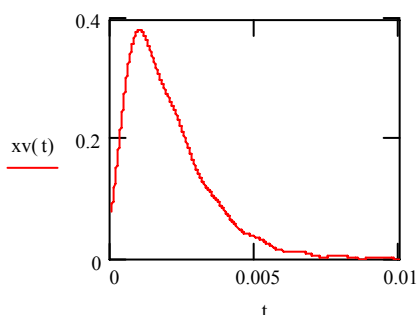
2. Определить верхнюю частоту ω_{\max} в спектре сигнала, задав погрешность аппроксимации 0,05. Для этого, выбрав ω_{\max} , вычислить обратное преобразование Фурье в пределах $(-\omega_{\max}, \omega_{\max})$, где $\omega_{\max}=2\pi f_{\max}$. Таким образом, будет произведена аппроксимация сигнала $x(t)$ сигналом с ограниченным спектром $xv(t)$. Сравнить этот восстановленный сигнал $xv(t)$ с исходным сигналом $x(t)$, для чего вычислить среднеквадратическую погрешность аппроксимации Δ . Если Δ будет больше 5%, увеличить ω_{\max} и повторить вычисления. Эту процедуру повторять до тех пор, пока Δ не уменьшится до 4 – 5%.

Для найденного значения ω_{\max} , вычислить интервал дискретизации T в соответствии с теоремой Котельникова, а затем определить число отсчетов, соответствующее этому T . Если N окажется дробным, округлить его до целого, обозначив его через $N1$. После этого уточнить интервал дискретизации, обозначив его через $T1$, а затем найти значение ω_{\max} , соответствующее $T1$.

Исходя из графика спектральной плотности, задаем верхнюю частоту в спектре $\omega_{\max}=4.5 \cdot 10^3$ и вычислим обратное преобразование Фурье:

$$xv(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \dot{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Этой функции $xv(t)$ соответствует график



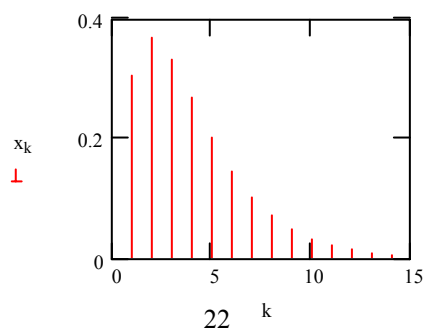
Среднеквадратическая погрешность (30) составляет 4,6%, т.е. удовлетворяет условиям задачи. По теореме Котельникова интервал дискретизации $T \leq \pi/\omega_{\max}$. В данном случае, полагая $T = \pi/\omega_{\max}$, получим $T = 6.981 \cdot 10^{-4}$ с.

Число отсчетов сигнала N , соответствующее этому T равно 11.886. Его надо округлить до целого, причем в сторону увеличения. Выберем $N1=15$. Этому числу отсчетов соответствует интервал дискретизации $T1=5.067 \cdot 10^{-4}$.

Дискретизированный сигнал $x(kT)$ записывается так:

$$x(kT) = \alpha k T1 e^{-\alpha k T1}$$

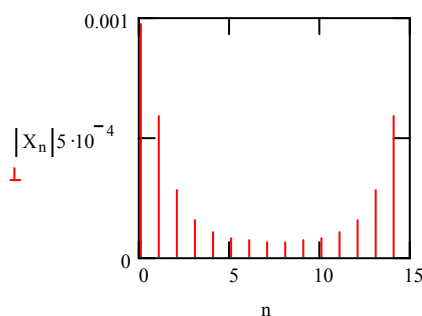
График дискретизированного сигнала.



3. Записать выражение ДПФ полученного дискретизированного сигнала и вычислить его. Построить график модуля ДПФ. Сделать выводы о характере спектра дискретизированного сигнала.

$$n := 0..14$$

$$X_n := T_1 \cdot \sum_{k=0}^{N_1-1} x_k \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot n \cdot \frac{k}{15}}$$



4. Сравнить модуль ДПФ для $n=5$ с модулем спектральной плотности $|\dot{X}(\omega)|$ на частоте, соответствующей этому значению n . Сделать выводы о соответствии ДПФ и спектральной плотности $\dot{X}(\omega)$.

Интервал Ω между спектральными составляющими ДПФ определяется формулой

$$\Omega = \frac{2\pi}{\tau_1} = \frac{2\pi}{0,0076 \text{ с}} = 826,316 \text{ рад/с},$$

поэтому $5\Omega = 4134.58 \text{ рад/с}$.

Модуль ДПФ для $n=5$ равняется $7.975 \cdot 10^{-5}$, а модуль спектральной плотности на этой частоте равен $5,528 \cdot 10^{-5}$.

Частота ω (рад/с)	4131,58
Модуль ДПФ	$7.975 \cdot 10^{-5}$
Модуль спектральной плотности	$5,528 \cdot 10^{-5}$

5. По заданному на z -плоскости расположению нулей и полюсов системной функции цифрового фильтра записать выражение системной функции $\dot{H}(z)$ и нарисовать структурную схему фильтра.

Если $X(z)$ – z -преобразование входного сигнала, а $Y(z)$ – z -преобразование выходного сигнала, то системная функция фильтра

$$\dot{H}(z) = \frac{\dot{Y}(z)}{\dot{X}(z)}.$$

Заданы нули и полюсы функции $\dot{H}(z)$ на z -плоскости:

нули $z_{01}=0, z_{02,3}=\pm 0,5j$;

полюсы $z_{*1}=0,8, z_{*2,3}=0,6 \exp(\pm j\pi/3)$.

Используя их, запишем:

$$\dot{H}(z) = \frac{z(z - 0,5j)(z + 0,5j)}{(z - 0,8)[z - 0,6 \exp(j\frac{\pi}{3})][z - 0,6 \exp(-j\frac{\pi}{3})]}.$$

После преобразований это выражение принимает вид:

$$\dot{H}(z) = \frac{z(z^2 + 0,25)}{z^3 - 1,4z^2 + 0,84z - 0,288} = \frac{z(z^2 + 0,25)}{(z - 0,8)(z^2 - 0,5z + 0,36)} =$$

$$\frac{1 + 0,25z^{-2}}{1 - 1,4z^{-1} + 0,84z^{-2} - 0,288z^{-3}}$$

По этой формуле строим структурную схему цифрового фильтра (рис.12).

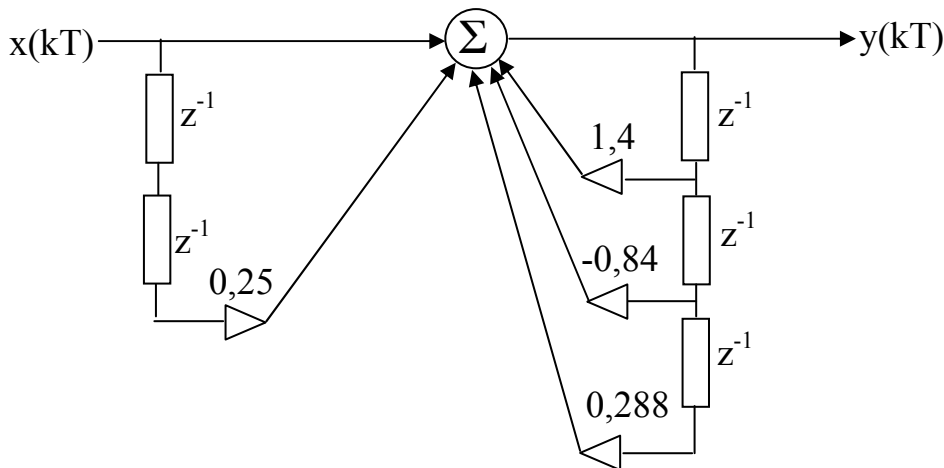


Рис.12

6. Вывести формулу импульсной характеристики фильтра $g(kT)$, рассчитать ее и построить $g(kT)$.

Для вывода выражения $g(kT)$ надо найти обратное z -преобразование системной функции $\dot{H}(z)$:

$$g(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \dot{H}(z)z^{k-1} dz$$

Этот интеграл равен сумме вычетов функции $\dot{H}(z)z^{k-1}$ в полюсах внутри контура C . Если в точке z_* функция $\dot{H}(z)z^{k-1}$ имеет полюс порядка s , то ее можно представить так

$$\dot{H}(z)z^{k-1} = \psi(z)/(z - z_*)^s.$$

Вычет в точке z_* дается формулой

$$\operatorname{Res}[H(z)z^{n-1}] = \frac{1}{(s-1)!} \left. \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \psi(z) \right|_{z=z^*}.$$

Если в точке z^* имеется только полюс первого порядка, то

$$\operatorname{Res}[H(z)z^{k-1}] = \psi(z^*).$$

В рассматриваемом примере

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z(z^2 + 0,25)}{z^3 - 1,4z^2 + 0,84z - 0,288} = \frac{z(z^2 + 0,25)}{(z - 0,8)[z - 0,6 \exp(j\frac{\pi}{3})][z - 0,6 \exp(-j\frac{\pi}{3})]} = \\ &= \frac{z(z^2 + 0,25)}{(z - 0,8)(z^2 - 0,6z + 0,36)} \end{aligned}$$

Эта функция имеет три простых полюса:

$$z_{*1} = 0,8; z_{*2} = 0,6 \exp(j\frac{\pi}{3}); z_{*3} = 0,6 \exp(-j\frac{\pi}{3}).$$

Найдем вычеты.

Вычет в полюсе z_{*1} .

Так как $\operatorname{Res}_1 = \psi_1(z_{*1})$, а

$$\psi_1(z) = \frac{z^{k-1} \cdot z(z^2 + 0,25)}{z^2 - 0,6z + 0,36} = \frac{z^k (z^2 + 0,25)}{z^2 - 0,6z + 0,36},$$

то

$$\operatorname{Res}_1 = \frac{(0,8)^k [(0,8)^2 + 0,25]}{(0,8)^2 - 0,6 \cdot 0,8 + 0,36} = 1,71 \cdot (0,8)^k$$

Вычет в полюсе z_{*2} .

В этом случае

$$\psi_2(z) = \frac{z^k (z^2 + 0,25)}{(z - 0,8)[z - 0,6 \exp(-j\frac{\pi}{3})]}.$$

$$\operatorname{Res}_2 = \frac{(0,6e^{j\frac{\pi}{3}})^k [(0,6e^{j\frac{\pi}{3}})^2 + 0,25]}{(0,6e^{j\frac{\pi}{3}} - 0,8)(0,6e^{j\frac{\pi}{3}} - 0,6e^{-j\frac{\pi}{3}})} = \frac{(0,6)^k e^{jk\frac{\pi}{3}} (0,36e^{j\frac{2\pi}{3}} + 0,25)}{(0,6e^{j\frac{\pi}{3}} - 0,8)j \cdot 1,04}.$$

Вычет в полюсе z_{*3} .

$$\psi_3(z) = \frac{z^k (z^2 + 0,25)}{(z - 0,8)[z - 0,6 \exp(j\frac{\pi}{3})]}.$$

$$\text{Res}_3 = \frac{(0,6e^{j\frac{\pi}{3}})^n [(0,6e^{-j\frac{\pi}{3}})^2 + 0,25]}{(0,6e^{-j\frac{\pi}{3}} - 0,8)(0,6e^{-j\frac{\pi}{3}} - 0,6e^{j\frac{\pi}{3}})} = - \frac{(0,6)^k e^{-j\frac{\pi}{3}} (0,36e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 0,25)}{(0,6e^{-j\frac{\pi}{3}} - 0,8) \cdot 1,04}$$

В этом примере удобно сложить Res_2 и Res_3 . После соответствующих преобразований эта сумма будет равна

$$\frac{(0,6)^k}{1,04} [0,432 \sin[(k+1)\frac{\pi}{3}] - 0,576 \sin[(k+2)\frac{\pi}{3}] + 0,3 \sin[(k-1)\frac{\pi}{3}] - 0,4 \sin(k\frac{\pi}{3})]$$

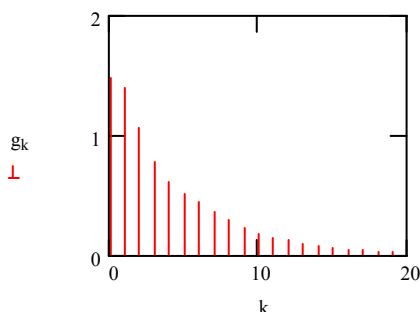
Импульсная характеристика, равная сумме трех вычетов

$$g(k) = 1,71 \cdot (0,8)^k + \frac{(0,6)^k}{1,04} [0,432 \sin[(k+1)\frac{\pi}{3}] - 0,576 \sin[(k+2)\frac{\pi}{3}] + 0,3 \sin[(k-1)\frac{\pi}{3}] - 0,4 \sin(k\frac{\pi}{3})].$$

Используя Matchad построим ее.

k := 0..20

$$g_k := 1.71 \cdot (.8)^k + (.6)^k \cdot \left[.432 \cdot \sin\left[(k+1) \cdot \frac{\pi}{3}\right] - .576 \cdot \sin\left[(k+2) \cdot \frac{\pi}{3}\right] + .3 \cdot \sin\left[(k-1) \cdot \frac{\pi}{3}\right] - .4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$



7. Вывести формулу частотной характеристики фильтра, рассчитать и построить его амплитудно-частотную характеристику.

Частотная характеристика фильтра может быть получена из выражения системной функции подстановкой $z = \exp(j\omega T)$.

Следовательно:

$$K(e^{j\omega T}) = \frac{(e^{j\omega T})^3 + 0,25e^{j\omega T}}{(e^{j\omega T})^3 - 1,4(e^{j\omega T})^2 + 0,84e^{j\omega T} - 0,288}$$

Заменяя $e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j\sin(\omega T)$, получим:

$$K(j\omega) = \frac{(\cos 3\omega T + 0,25 \cos \omega T) + j(\sin 3\omega T + 0,25 \sin \omega T)}{(\cos 3\omega T - 1,4 \cos 2\omega T + 0,84 \cos \omega T - 0,288) + j(\sin 3\omega T - 1,4 \sin 2\omega T + 0,84 \sin \omega T)}$$

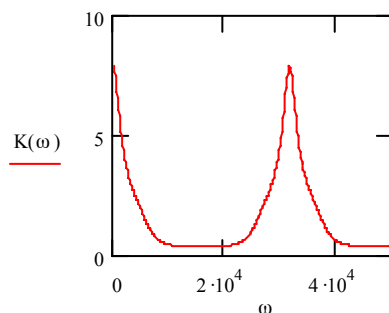
Амплитудно-частотная характеристика фильтра

8. Записать разностное уравнение цифрового фильтра и вычислить выходной

$$|K(\omega)| = \frac{\sqrt{1.0625 + .5 \cos(2\omega T)}}{\sqrt{3.75 - 5.636 \cos(\omega T) + 2.4864 \cos(2\omega T) - .576 \cos(3\omega T)}}$$

$\omega := 0, 10^2 \dots 5 \cdot 10^4$ $T := .0002$

$$K(\omega) := \frac{\sqrt{1.0625 + .5 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T)}}{\sqrt{3.75 - 5.635 \cdot \cos(\omega \cdot T) + 2.4864 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot T) - .576 \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot T)}}$$



сигнал.

$$\hat{H}(z) = \frac{1 + 0,25z^{-2}}{1 - 1,4z^{-1} + 0,84z^{-2} - 0,288z^{-3}}$$

Так как

то ему соответствует следующее разностное уравнение:

$$y(kT) = x(kT) + 0,25x[(k-2)T] + 1,4y[(k-1)T] - 0,84y[(k-2)T] + 0,288y[(k-3)T]$$

Решение разностного уравнения

$$k := 0..14 \quad \alpha := 10^3 \quad T1 := 5.067 \cdot 10^{-4}$$

$$x_k := \alpha \cdot k \cdot T1 \cdot e^{-\alpha \cdot k \cdot T1}$$

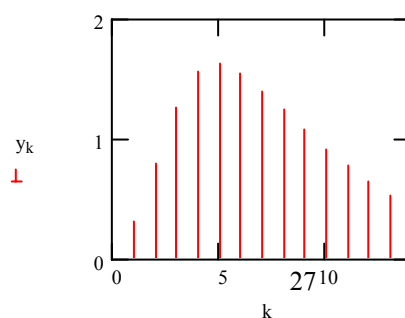
$$y_0 := x_0 \quad y_1 := x_1 \quad y_2 := x_2 + .25 \cdot x_0 + 1.4 \cdot y_1$$

$$y_3 := x_3 + .25 \cdot x_1 + 1.4 \cdot y_2 - .84 \cdot y_1$$

$$k := 4..14$$

$$y_k := x_k + .25 \cdot x_{k-2} + 1.4 \cdot y_{k-1} - .84 \cdot y_{k-2} + .288 \cdot y_{k-3}$$

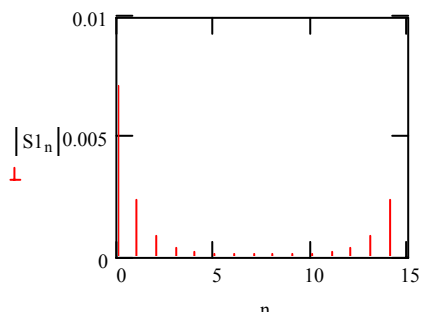
$$k := 0..14$$



9. Записать выражение ДПФ сигнала на выходе фильтра и вычислить его. Построить график ДПФ выходного сигнала.

$$n := 0..14$$

$$S1_n := T1 \cdot \sum_{k=0}^{14} y_k \cdot e^{-j \cdot n \cdot k \cdot 2 \frac{\pi}{15}}$$



Литература.

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. М.: Высшая школа, 2000. 462 с.
3. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1982. 109 с.